



**МАЗУРОВ**  
**Владимир Данилович**

Мазуров В.Д. (год рождения 1940) — выпускник математико-механического факультета Уральского университета (1962). Доктор физико-математических наук (1975), профессор (1980). Специалист в области математического программирования и распознавания образов. В УрГУ работает с 1991 г., заведующий кафедрой экономического моделирования и информатики. Соросовский профессор, член-корр. РАЕН.

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЦЕННОСТИ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО ВЫБОРА**

Как мало мы все-таки знаем! Исчезающе мало и совершенно недостаточно для уверенной спокойной жизни. А предугадать будущее — вообще не в силах. Очень хотелось бы найти надежную основу существования. Одной из таких основ могли бы стать принципы эмпирической индукции. И этим многие занимаются. Но, по правде говоря, основы этой пока нет.

Мы продвигаемся вперед, навстречу новым временам, — в полном мраке, различая лишь некоторые случайно выхваченные неверным огнем детали реальности. Никакие обстоятельства не гарантируют нам успеха. Ясно только, об этом говорит весь наш опыт, что мы должны упорно трудиться, прокладывая шаткие мостки математических и других конструкций, чтобы иметь хоть какую-то более или менее твердую основу для своих действий здесь и сейчас, где мы находимся. Включение наблюдений в некоторую умозрительную структуру позволяет в какой-то степени предвидеть возможные варианты событий вне

сферы наблюдений. Так что над конструкциями, над математическими моделями необходимо работать. Нужно трудиться, чтобы иметь право сказать: мы сделали, что могли. Чтобы не отстать, приходится бежать, напрягая все силы.

Я могу только начать разговор о тех ограниченных возможностях, которые нам дают математические модели для удовлетворительного существования. И здесь только беглые наброски, а вся тема необъятна.

### **1. ДВОЙСТВЕННОСТЬ ВЫБОРА**

Двойственность задач принятия решений состоит в том, что мы одновременно и действуем, и оцениваем свои действия. Человек всему приписывает ценности. Он рефлектирует.

По М. Веберу, поведение человека может быть:

- целерациональным;
- ценностно-рациональным;
- аффективным;
- традиционным.

Нам кажется, что на самом деле вся рефлексия при выборе действий связана с синтезом указанных типов поведения. И спасительным моментом является опора на ценности и на традиции. Это в какой-то степени гарантирует от опасных несбалансированных действий.

Действиям сопряжены ценности. Это ценности факторов выбора. И конструктивное их определение дает математика выбора.

В ряде новых трактовок экономической теории все более активно используются — наряду с классическими — новые категории, такие как выбор, диагностика вариантов, ценности факторов выбора и диагностики. Изучение практически важных аспектов понятия «выбор» приводит к новым сложным моделям и к формированию новых понятий. Многие задачи выбора и диагностики вариантов практических решений при их прямом непосредственном моделировании представляются противоречивыми математическими задачами, то есть задачами, не имеющими решений. И чаще всего эти противоречия возникают по существу, то есть они отвечают реальным противоречиям, они не устранимы, если мы не ослабляем понятия решений, не ослабляем или не модифицируем условий задач выбора и диагностики. В качестве примеров можно привести несобственные задачи оптимального или эффективного экономического выбора и задачи согласования индивидуальных предпочтений и критериев выбора решений.

Фундаментальным эвристическим и логическим обоснованным подходом к развязке противоречий в таких задачах является прецедентно-классификационный принцип, вначале сформулированный в рамках теории

коллективных решений для задач оптимизации, диагностики, классификации, распознавания состояний технико-экономических и других процессов.

Этот принцип заключается в следующем :

— исходная задача выбора и принятия решений заменяется соответствующей задачей разбиения некоторого множества вариантов решений на классы эквивалентности, задачей классификации;

— для задачи классификации применяется метод коллективных решающих правил, с различными правилами формальной демократии, то есть с различными способами агрегирования индивидуальных решений в коллективные;

— задача классификации решается на основе прецедентного подхода, то есть способ ее решения настраивается на корректный способ, и эта настройка реализуется обучением на прецедентах.

Для такого подхода нами доказана корректность агрегирования индивидуальных правил, в том числе для демократий принятия решений по большинству голосов, для демократий старшинства, для демократии жюри и других, для целого спектра естественно используемых демократий.

Все это стало возможным благодаря применению математических конструкций и принятых в математике критериев строгости рассуждений.

Заметим, что было бы наивным абсолютизировать математику, ее возможности в изучении реальности. Статус математики среди других наук — трудный вопрос. Он и неясен до сих пор. Можно только сказать уверенно, что это некоторый особый статус. Ясно, что эта наука — «человеческая, слишком человеческая».

Но я хочу говорить о более конкретных вещах, держась ближе к современным насущным земным потребностям.

### 2. МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Математика — поле деятельности хороших людей, это — в принципе. В последнее время я включился в процесс подготовки хороших людей: математиков — экономистов и экономистов — математиков, и увидел математику как бы со стороны. И только хочу поделиться своими наблюдениями. В частности, нужно обратить внимание на математическую экономику как одно из важных направлений приложения математических способностей.

Математика — наука о структурах. В том числе — о числовых и пространственных структурах. Применяется во всех науках, естественных, гуманитарных и общественных. Используется во всех сферах человеческой деятельности. Математика — это еще и наука о бесконечном. О тех эффектах, которые нас ожидают (и которых мы заранее не можем предугадать), когда мы увеличиваем размерности наших моделей, продвигаясь к потенциальной бесконечности. Нас окружает хаос. Мы действуем в этом хаосе, освещая фонариком почву под ногами. Способ заглянуть подальше и что-то предвидеть: включение явлений в какую-нибудь структуру. Мы строим структуры как мостки, по которым пытаемся преодолеть бездну хаоса. В математических моделях, представляющих упорядоченные структуры, мы обязаны как-то учитывать неструктурное, дополнительное, внемодельное. И здесь помогают обучающиеся алгоритмы, имитирующие работу мозга. Например, нейронные сети.

Математика — фундамент информатики. Она занимает основополагающее место и в физике (математическая физика), и в экономике (математическая экономика),

Математики образуют как бы особый клан. Это как бы жрецы науки, доступной немногим. Так видится со стороны. Это потому, что мало кто способен трудом преодолеть путь, ведущий в творческую математику.

Математика связана и с мистикой, понимаемой широко и фундаментально. Это не вера в чудеса, а некоторое понимание необъятности и непознаваемости объективного мира. Математик в процессе своего творчества как бы из ничего продуцирует важные результаты. При этом он ведет диалог со своим подсознанием.

Это идет еще со времен Пифагора и его эзотерической школы. Особенности математики в этом и других контекстах — стремление к точности и ясности. Математика — это огромный труд по созданию все более мощного аналитического аппарата.

Эмпирический факт исключительной эффективности математики в науке и практике является загадочным и непостижимым, хотя есть много полезных философских соображений на эту тему.

В возникающем информационном обществе значение математики, математических моделей становится все более признаваемым и наглядно постигаемым фактом. Дело в том, что математические модели — основной инструмент информационных технологий и их исследования.

Математика в принципе, по идее, должна воспитывать хороших людей. Умных, сильных и справедливых.

Как поле для творчества математика наиболее близка человеку: это пространство созидания все новых и новых конструкций и их обоснования. И в

силу своей фундаментальности математика требует огромного труда и полной отдачи. Это — и область чистого мышления, и чистой практики. Это чистый труд.

Чистый! Однако математик не может отгородиться от жизни, в которой есть всякое. И к математике примыкает моделирование. Это способ сочетать структурное с неструктурным. Рациональное — с иррациональным.

Математики могут и активно участвовать в непосредственной экономической жизни — красиво жить в том или ином смысле. (Примеры в УрГУ: специализации на кафедре математической экономики и кафедре экономического моделирования и информатики).

Для этого они имеют самый важный шанс: математические способности, к которым надо только добавить волю и естественное нравственное чувство. Так что перспективы в принципе самые благоприятные.

Развитие многих наук в их существенных поворотных пунктах отталкивалось от нетривиальных открытий в математике. Так было в физике, так было в экономической науке.

Об экономике — несколько подробнее:

Ее этапы отвечали таким математическим этапам:

формальная логика — дифференциальное исчисление — вариационные принципы — механическая динамика и равновесие — математическая статистика — линейная алгебра — линейное программирование и теория игр — алгебраические модели и выпуклый анализ — распознавание образов — нейронные системы и искусственный интеллект — динамический хаос и фрактальная математика.

Сейчас линейная математика заменяется существенно нелинейной, это

совсем новая математика, естественно вырастающая из старой.

Математика, в сущности, наука о бесконечном. При движении в бесконечное мы открываем все новые феномены, которые нельзя предсказать: это трудная работа. Можно сказать, что математика — это гуманитарное направление, не позволяющее соскальзывать в облегченные рассуждения.

История математики богата глубочайшими идеями, в том числе философскими. Фалес дал начало фундаментальному понятию доказательства. Платон говорил о математике как о единственной чисто научной дисциплине, как входу во все остальные виды интеллектуальной деятельности. Важное значение имели работы Пифагора и его школы. Это и чисто математические работы, и мистика чисел и фигур. Многие аспекты бытия объяснялись взаимоотношениями чисел, в том числе и музыка.

Если брать одну только линию развития логики, то можно привести череду величайших имен: Кузанский, Спиноза, Декарт, Лейбниц, Кант, Фреге, Милль, Рассел. Можно еще продолжать, но пока остановимся. Одна только математическая логика как точная наука о развернутых формах мышления — необъятная тема.

Современное гуманитарное мышление — во многом математическое. Достаточно назвать математическую экономику, социологию, политологию, психологию. А с появлением уже развитой информатики и информационной индустрии применение математических моделей стало всеобщим и необходимым. Одна только тема «Искусственный интеллект» необъятна как по содержащимся в ней моделям, так и — главное — по их осмыслению с точки зрения логики и методологии развития всей науки и техники.

Гуманитарная сущность математики проявляется в том, что математика исследует в том числе и формы человеческого мышления, причем не только рациональные (Это можно заметить, наблюдая работу нейронных систем). Далее, она имеет глубокое воспитательное значение, она связана с трудом, ее результаты достигаются максимальным сосредоточением умственных и волевых усилий. Наконец, все ее глубокие результаты несут нетривиальную эстетику.

Сближение математики с гуманитарными науками характеризуется и ростом внимания к многозначности, рефлексии (двойственности), нелинейности, хаотическим процессам и отражению иррациональных процессов в моделировании. Этому способствует использование нейронных систем в решении неформализованных задач принятия решений, прогнозирования, диагностики.

В этой сфере можно проследить и влияние постмодернизма, что связано с широким использованием комбинаторики, более свободным и широким выбором моделей и манипулированием ими.

Можно отметить еще такой аспект гуманитаризации математики, как все больший отказ от излишней идеализации объектов; математика становится более «человечной» еще в том смысле, что она переходит к большей реалистичности в моделировании. Более реалистичные модели поневоле становятся более тонкими, более изощренными.

Если математику элементарно не мешают говорить, то есть, например, не шумят, он пользуется хорошим мелом и доской, то в остальном он свои права интеллектуала реализует абсолютно свободно. Его могут прервать, только когда надо сделать замечание о чисто логических погрешностях. Математический язык и математические конструк-

ции — это чистое творчество, но с другой стороны оно стеснено рамками строгости и своеобразной (чисто логической) объективности. Изменить математические определения, теоремы и их доказательства — это значит прежде всего изобрести все соответствующие конструкции (как бы дать им сформироваться в подсознании), а затем вывести в область сознательного, оформить вербально, причем само изложение выглядит, как (в принципе) абсолютно убедительное и строгое. Язык математика и свободен — в своих построениях он волен, в принципе, как угодно высоко восходить по ступеням абстракций, и несвободен. Он должен удовлетворять строгим критериям. Данный вид творчества абсолютно свободен, так как никоим образом не связан с идеологией, общественным мнением и так далее.

А теперь признаемся, что мы весьма идеализируем ситуацию математики. Да это и ясно: говорить об АБСОЛЮТНОЙ свободе в науке — наивно. Многое определяется процессами, происходящими в обществе. Но есть и другая «несвобода», более конструктивная; математик должен заботиться о релевантности своих конструкций. И если эту сторону тоже обеспечивать инструментально, то здесь прежде всего надо использовать идеи двойственности. Двойственность позволяет «раскачать» математическую модель, проверить на прочность и устойчивость, и даже осуществить акт рефлексии, посмотреть на модель как бы со стороны, оставаясь в рамках формальных построений.

Известна фундаментальная роль двойственности в оптимизации, в настоящее время разрабатывается и теория двойственности в распознавании, есть работы по двойственности для экспертных систем. Есть и обобщающие работы по самой идее двойственности в математике и ее приложениях.

Наш подход к общей проблеме двойственности таков: двойственная задача дает возможность оценить значимость тех или иных блоков в постановке исходной задачи, определить ценности. Так, двойственным к выбору является оценивание факторов выбора, двойственность связана с пространством оценок, сопряженным исходной задаче.

### 3. СТРУКТУРАЛИЗМ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Математика — наука о структурах. Но при решении реальных задач необходимо учитывать и внеструктурное. Один из способов обоснованного учета внеструктурного — использование блока распознавания как дополнительного к алгебраической или аналитической модели. Другой способ — рефлексия, что предполагает, например, построение двойственных моделей. Естественно, что необходимо рассматривать двойственность для синтеза моделей, включающих и анализ структур, и учет внеструктурного. В частности, в этой области нами были рассмотрены двойственные конструкции для моделей выбора, включающих распознавание и диагностику.

Рефлексии образуют ряд. Если  $M$  — модель,  $*$  — операция рефлексии, то полное описание имеет вид ряда

$$M + M^* + M^{**} + M^{***} + \dots$$

### 4. ОПТИМИЗАЦИЯ И РАСПОЗНАВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Принятие решений в экономике инструментируется экспертными системами. В Институте математики и механики УрО РАН и в УрГУ разрабатываются экспертные системы для

задач интеллектуальной поддержки решений в области диагностики и прогнозирования сложных систем, в том числе экономических, для обсчета и сравнения различных вариантов практических решений. Состояние экономики отражается массивом данных, множество всех реальных возможных состояний — допустимым множеством в пространстве состояний.

При этом эволюция состояний экономики моделируется траекторией элементов в допустимом множестве. Возможные воздействия лиц, принимающих решения, направлены на улучшение свойств этой траектории, соответствующая задача моделируется задачей математического (оптимального) программирования. Диагностика и прогнозирование обеспечиваются решением задач распознавания образов и факторного анализа. Для них нами разработаны и продолжают совершенствоваться некоторые нейронные системы. Кроме того, в экспертных системах используются правила логического вывода.

Для оценки надежности и устойчивости результатов принимаемых решений нами построены теория и методы синтеза и анализа двойственных задач оптимизации, распознавания и логического вывода. Я здесь имею в виду работу целых коллективов в УрГУ (кафедры МЭ и ЭМИ) и в Институте математики и механики.

На этой основе возможен мониторинг региона и отдельных производств, оценка и учет ресурсов, оценка возможных вариантов развития региона. При этом реальные задачи обычно неформализованы, и для таких задач мы строим специальные методы. Есть подходы и к развязке объективно возникающих противоречий.